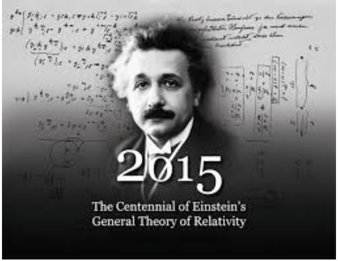
TEORÍA DE LA RELATIVIDAD GENERAL.
100 AÑOS DE LAS ECUACIONES DE EINSTEIN DE LA GRAVITACIÓN

NARCISO ROMÁN ROY

Departamento de Matemáticas **Universitat Politècnica de Catalunya**



Seminarios de la FME. (25 de noviembre de 2015).

Introducción

25 de noviembre de 1915: *Albert Einstein* presenta la forma final de las *ecuaciones de campo de la Gravitación* en la *Academia Prusiana de Ciencias* de Berlín, culminando la Teoría de la Relatividad General.

Objetivo: Conmemorar esta efeméride.

- Exposición de los fundamentos, desarrollo, consecuencias y trascendencia de la TRG.
- Breve discusión histórica sobre la génesis de la TRG. (Las aportaciones de *A. Einstein* y *D. Hilbert*).

Índice

Índice

Fundamentos de la Relatividad General

Antecedentes: Teoría de campo de la Gravitación newtoniana

Campo gravitatorio $\mathbf{g}(t,\mathbf{x})$ por distribución de masa de densidad $\rho(t,\mathbf{x})$

$$\nabla\cdot\mathbf{g}(t,\mathbf{x}) = -4\pi G\rho(t,\mathbf{x}) \quad ; \quad \nabla\times\mathbf{g}(t,\mathbf{x}) = 0 \ , \tag{1.1}$$

$G = 6,6738480\cdot 10^{-11}\ m^3/kg\, s^2$, *Constante Universal de la Gravitación* (primera estimación: *Henry Cavendish*, 1798).

$\mathbf{g}$(t,$\mathbf{x}$) es un campo conservativo (en regiones simplementes conexas):

$$\mathbf{g}(t,\mathbf{x}) = -\nabla\varphi(t,\mathbf{x}) \ ,$$

$\varphi(t,\mathbf{x})$ es un *potencial gravitatorio*. Se obtiene la *ecuación de Poisson*:

$$\nabla^2\varphi(t,\mathbf{x}) = 4\pi G\rho(t,\mathbf{x}) \ . \tag{1.2}$$

La fuerza gravitatoria sobre una partícula es proporcional al campo:

$$\mathbf{F} = m_g\,\mathbf{g} = -m_g\,\nabla\varphi \quad (m_g\text{: } \textit{masa gravitatoria} \text{ de la partícula}) \ . \tag{1.3}$$

(1.3) + 2ª Ley de Newton = ec. dinámica en campos gravitatorios.

De la primera de las ecuaciones (1.1), usando el *teorema de la divergencia de Gauss-Ostrogradskii* y la ecuación (1.3) se obtiene la ley de *la inversa del cuadrado de la distancia* (*Ley de Newton de la Gravitación Universal*).

$$\mathbf{F} = \mathbf{g}\, m_g = -\frac{GMm_g}{r^2}\,\mathbf{u}_r \ , \tag{1.4}$$

y el potencial gravitatorio es: $\varphi = -\dfrac{GM}{r}$. (Versión original de la teoría).

La teoría de Newton de la Gravitación es compatible con la mecánica newtoniana: las ecuaciones son invariantes por transformaciones de Galileo (extendidas); pero es incompatible con la RE:

- Acción gravitatoria instantánea, en contradicción con el límite c.
- (1.4) es válida en un sistema de referencia distinguido (en el que las posiciones de las partículas se miden simultáneamente).
- La distancia varía para observadores inerciales distintos

Observaciones experimentales inexplicables: precesión anómala del perihelio de órbitas planetarias (mediciones precisas para la órbita de Mercurio).

Una vez desarrollada la Teoría de la Relatividad Especial (1905), el siguiente objetivo de *Albert Einstein* fué elaborar una nueva teoría de la Gravitación compatible con la Relatividad Especial, que contuviera la Teoría de la Gravitación de Newton como caso particular.

La Teoría de la Relatividad General es la generalización de la Relatividad Especial (RE) que incorpora la Gravitación.

Albert Einstein inició su investigación en 1907 y tardó ocho años en elaborar la nueva teoría.

El Principio de Equivalencia

El *Principio de Equivalencia* es la idea germinal de la TRG.

Su origen está en la teoría de la Gravitación y la mecánica newtonianas:

$$\left.\begin{array}{r}\text{Segunda Ley de Newton: } \mathbf{F} = m_i\,\mathbf{a} \\ \text{Ley de la Gravitación newtoniana: } \mathbf{F} = m_g\,\mathbf{g}\end{array}\right\} \implies \mathbf{a} = \frac{m_g}{m_i}\,\mathbf{g}$$

Experimentos de *Galileo Galilei* sobre caída de objetos masivos desde la torre de Pisa, y más recientemente de *Loránd Eötvös* (en 1906-1909), posteriormente refinados por otros usando péndulos de torsión:

$$\text{(masa inercial)} \qquad m_i = m_g \qquad \text{(masa gravitatoria)}$$

Postulado 1.1

Principio de Equivalencia de Galileo o débil: *La masa inercial y la masa gravitatoria son iguales. Como consecuencia, en un campo gravitatorio, todas las partículas materiales experimentan la misma aceleración independientemente de sus masas.*

Una partícula u observador está "en caída libre" en un campo gravitatorio cuando está sometido únicamente a la acción de la gravedad (no sometido a ninguna otra fuerza, orbitando y sin rotación)

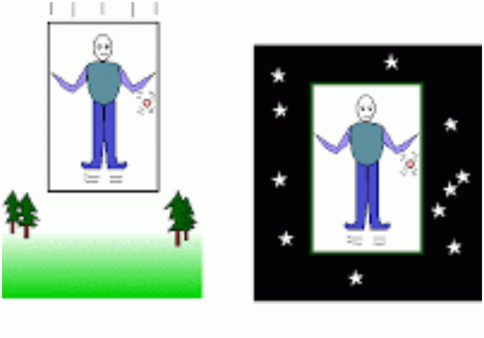
PEG $\Longrightarrow$ un observador en caída libre describe la Mecánica igual que un observador inercial, (equivalencia para la Mecánica de los sistemas en caída libre con los sistemas inerciales).

Los observadores (o sistemas) en caída libre se denominan **observadores (sistemas) localmente inerciales**.

Extensión a todas las leyes de la Física
(las de la RE = Mecánica + Electromagnetismo).

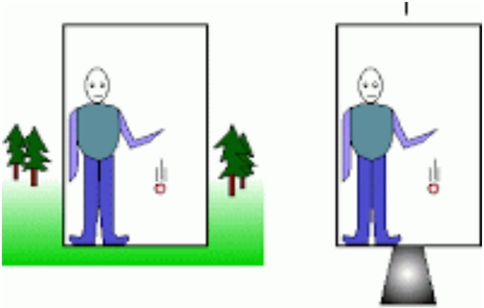
Postulado 1.2

Principio de Equivalencia de Einstein: *En regiones suficientemente pequeñas del espacio-tiempo un sistema en caída libre en un campo gravitatorio (aislado, sin rotación) es físicamente indistinguible de un sistema inercial (no acelerado).*



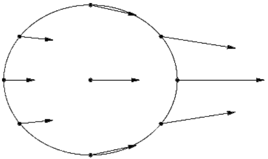
Postulado 1.3

Principio de Equivalencia de Einstein (*enunciado alternativo*): *En regiones suficientemente pequeñas del espacio-tiempo un campo gravitatorio* $\mathbf{g}$ *es físicamente indistinguible de un sistema acelerado con aceleración* $\mathbf{a} = -\mathbf{g}$ *respecto a un sistema inercial. Por consiguiente, no hay diferencia físicamente observable entre los efectos locales de la gravedad y la aceleración.*



Consecuencias del Principio de Equivalencia

- *Localidad espacio-temporal*: Campos gravitatorios no son uniformes $\Longrightarrow$ En caída libre, las partículas se acercan o se separan (*efectos* o *fuerzas de marea*). Un sistema en caída libre equivalente a un sistema inercial para regiones espaciales e intervalos de tiempo limitados.

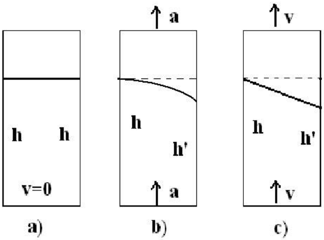


Conclusión:

En RE se puede tomar un sistema de coordenadas afines que cubre todo el espacio-tiempo. En RG, los sistemas de referencia son locales:

El modelo matemático del espacio-tiempo en Relatividad General es una *variedad diferencial* 4-dimensional.

- *Curvatura espacial*: En RE, las trayectorias de los rayos de luz en un sistema inercial son rectas en el espacio (geodésicas). Un rayo de luz en un sistema acelerado se curva en sentido opuesto al de la aceleración y, por el enunciado alternativo del PE, en presencia de gravedad, la trayectoria se curva "hacia la fuente de la gravitación".



Un campo gravitatorio curva los rayos de luz, que siguen trayectorias geodésicas en el espacio que no son rectas $\iff$ el espacio está curvado. (Fenómeno de la *deflexión de los rayos de luz*).

- *Curvatura temporal*: En un punto de un sistema acelerado se emite una onda luminosa en el sentido de la aceleración. Transcurrido un tiempo Δt la luz se recibe en otro punto que, por estar acelerado, se mueve con velocidad mayor que la del punto de emisión, $\Delta v = a\Delta t$. Por el *efecto Doppler-Fizeau* (clásico), la frecuencia disminuye

  $$\Delta \nu = \nu_r - \nu_e = -\frac{a\Delta t}{c} \ .$$

  Si la onda se emite en sentido contrario la frecuencia aumenta.
  Por el PE, el efecto sería igual en un campo gravitatorio.

  La energía de la luz es proporcional a la frecuencia $\iff$ la luz pierde energía "al escapar" de un campo gravitatorio y la gana "al caer".
  (Fenómeno del *corrimiento hacia el rojo* o *al violeta gravitacional*).

  Analizando el tiempo entre emisión y recepción de ondas luminosas se concluye que el tiempo transcurre más lentamente donde el campo gravitatorio es mayor y se interpreta como "curvatura temporal".
  (Fenómeno *dilatación del tiempo gravitacional* o *"radar time delay"*).

Conclusiones:

La luz es sensible a los campos gravitatorios (no sólo la materia).

La curvatura espacio-temporal está asociada a la existencia de un campo gravitatorio (equivalentemente, a la existencia de aceleración):

Campo gravitatorio (local) $\Longleftrightarrow$ Sistema acelerado (local) $\Longleftrightarrow$ Curvatura espacio-temporal

La existencia de curvatura significa que la métrica del espacio-tiempo no es la métrica de Minkowski (que sería un caso particular):

El espacio-tiempo está dotado de una $\text{métrica lorentziana } (1,3)$.

El origen de la curvatura es el del campo gravitatorio que es la materia, según la teoría clásica; pero materia y energía son equivalentes, por la RE:

La presencia de materia-energía es responsable de la curvatura del espacio-tiempo y, por tanto, determina la métrica.

Postulados y principios de la Relatividad General

Postulado 1.4

Postulado "Cero": Estructura del espacio-tiempo: *El espacio-tiempo es una variedad lorentziana 4-dimensional* $(\mathbb{M}^4, \mathrm{g})$.

Principio de Relatividad General: *Los sistemas localmente inerciales son equivalentes: en ellos son válidas las leyes de la Física de la RE.*

Principio General de Covariancia: *Las ecuaciones de la Relatividad General son ecuaciones tensoriales.*

Principio de Correspondencia: *La RE y la Teoría de Newton de la Gravitación son casos particulares de la Teoría de la Relatividad General.*

Estructura de las ecuaciones:

Geometría (curvatura) $\propto$ Distribución materia-energía.

(Generalizan la *Ecuación de Poisson*).

Índice

Ecuaciones de la Relatividad General

El tensor de esfuerzo-energía-momento

Masa y energía son equivalentes $\rightarrow$ *densidad de energía* $\mathcal{E}$.

Energía/c es la comp. temporal del cuadrimomento $\mathrm{P} = (E/c, P^1, P^2, P^3)$ $\rightarrow$ *densidad de cuadrimomento* $\mathcal{P} = (\mathcal{E}/c, \mathcal{P}^1, \mathcal{P}^2, \mathcal{P}^3)$.

Las leyes de transformación de estas densidades generan, de manera natural, un campo tensorial 2-contravariante simétrico:

Definición 2.1

Tensor de esfuerzo-energía-momento *de un sistema de partículas:*

$$\mathrm{T}^{\mu\nu} = \left(\begin{array}{c|c} \text{densidad} & c\cdot\text{densidades} \\ \text{de energía} & \text{de momentos} \\ \hline c\cdot\text{densidades} & \text{tensor} \\ \text{de momentos} & \text{de esfuerzos} \end{array} \right) = \begin{pmatrix} \mathcal{E} & c\mathcal{P}^1 & c\mathcal{P}^2 & c\mathcal{P}^3 \\ c\mathcal{P}^1 & \mathcal{S}^{11} & \mathcal{S}^{12} & \mathcal{S}^{13} \\ c\mathcal{P}^2 & \mathcal{S}^{21} & \mathcal{S}^{22} & \mathcal{S}^{23} \\ c\mathcal{P}^3 & \mathcal{S}^{31} & \mathcal{S}^{32} & \mathcal{S}^{33} \end{pmatrix}$$

Teorema 2.2

Conservación del esfuerzo-energía-momento: $\nabla_\mu \mathtt{T}^{\mu\nu} = 0$, $(\mu = 0, 1, 2, 3)$.

Ejemplos:

Fluido perfecto en reposo ("materia en polvo") con densidad de energía propia ρ_o, sin interacción (presión nula), o con presión isótropa p:

$$\mathtt{T} = \begin{pmatrix} \rho_o & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathtt{T} = \begin{pmatrix} \rho_o & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix} .$$

Fluido perfecto moviéndose con cuadrivelocidad $\mathtt{V}$ y presión isótropa p:

$$\mathtt{T} = (\mathtt{T}^{\mu\nu}) \quad , \quad \mathtt{T}^{\mu\nu} = (\rho_o + p)\,\mathtt{V}^\mu \mathtt{V}^\nu + p\,\mathtt{g}^{\mu\nu} .$$

Cualquier fuente de energía contribuye al tensor de EEM. Para una fuente electromagnética con tensor de campo electromagnético $\mathtt{F}$:

$$\mathtt{T} = (\mathtt{T}^{\mu\nu}) \quad , \quad \mathtt{T}^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}\left(\mathtt{g}_{\alpha\beta}\mathtt{F}^{\mu\alpha}\mathtt{F}^{\nu\beta} - \frac{1}{4}\mathtt{g}_{\mu\nu}\mathtt{F}^{\alpha\beta}\mathtt{F}_{\alpha\beta}\right) ,$$

El tensor de Einstein

Definición 2.3

$$\mathtt{G}_{\mu\nu} = \mathtt{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R\, \mathtt{g}_{\mu\nu} \ .$$

$\mathtt{R}_{\mu\nu}$: tensor de Ricci. $R = \mathtt{g}^{\mu\nu}\mathtt{R}_{\mu\nu}$: curvatura escalar.

El **tensor de Einstein** es el único tensor de segundo orden (salvo producto por constantes) que satisface las condiciones:

- Es simétrico.
- Se construye con la métrica $\mathtt{g}$ y el *tensor de curvatura de Riemann* $\mathtt{R}$.
- Es lineal en las componentes de $\mathtt{R}$: sus componentes dependen sólo de $\mathtt{g}_{\mu\nu}$, $\partial_\mu \mathtt{g}_{\mu\rho}$, $\partial_\mu\partial_\nu \mathtt{g}_{\rho\lambda}$ y las componentes $\partial_\mu\partial_\nu \mathtt{g}_{\rho\lambda}$ aparecen en forma lineal (el grado de las ecuaciones es 1).
- Es compatible con la ley de conservación de la energía-momento: $\nabla_\mu \mathtt{G}^{\mu\nu} = 0$.
- Es nulo en un espacio-tiempo plano.

La ecuación de Einstein de la gravitación

Postulado 2.4

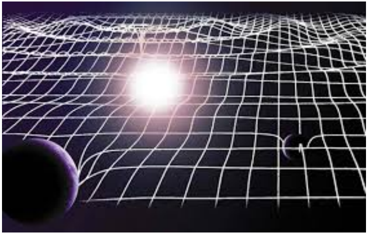
$$
\begin{aligned}
\mathtt{G}_{\mu\nu} &:= \mathtt{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R\, \mathtt{g}_{\mu\nu} = K\, \mathtt{T}_{\mu\nu} \ , \\
\mathtt{R}_{\mu\nu} &= K \left(\mathtt{T}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T\, \mathtt{g}_{\mu\nu} \right) \ .
\end{aligned}
$$

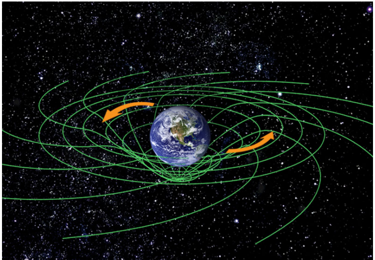
$K = \dfrac{8\pi G}{c^4}$: constante de acoplamiento. $T = \mathtt{T}^{\mu}_{\mu}$: escalar de Laue.

$$
(\delta^{\alpha}_{\mu}\delta^{\beta}_{\nu} - \frac{1}{2}\, \mathtt{g}_{\mu\nu}\, \mathtt{g}^{\alpha\beta}) \left(\frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta}}{\partial x^{\lambda}} - \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\alpha\lambda}}{\partial x^{\beta}} + \Gamma^{\lambda}_{\lambda\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\lambda}_{\beta\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\lambda\alpha} \right) = \frac{8\pi G}{c^4}\, \mathtt{T}_{\mu\nu}
$$

$$
\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \mathtt{g}^{\lambda\alpha} \left(\frac{\partial \mathtt{g}_{\alpha\mu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial \mathtt{g}_{\alpha\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial \mathtt{g}_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} \right) \ .
$$

- 10 ecuaciones (*ecuaciones de Einstein*).
  incógnitas: las 10 componentes (indeps.) de la métrica lorentziana $\mathbf{g}$.
  $\nabla^\mu \mathtt{G}_{\mu\nu} = 0 \Longrightarrow$ 6 ecuaciones independientes.
- Aparecen derivadas de primer y segundo orden de las componentes de $\mathbf{g}$: EDP's de segundo orden.
- Son no lineales
- La resolución exacta es de una dificultad extrema.
  Las soluciones exactas conocidas se obtienen imponiendo condiciones que simplifican el problema, p. ej., condiciones de simetría.





La ecuación geodésica. Desviación geodésica: efectos de marea

Consecuencia 2.5

Ecuación de las trayectorias: *Las líneas de universo de las partículas materiales libres (en caída libre) son geodésicas de tipo tiempo en* $(\mathtt{M}^4, \mathrm{g})$*. Las trayectorias de los rayos de luz son geodésicas de tipo luz en* $(\mathtt{M}^4, \mathrm{g})$*:*

$$\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \ .$$

"Matter tells space how to curve and space tells matter how to move".
(*John Archibald Wheeler*).

Los 'efectos de marea' son la manifestación de que, debido a la curvatura, las geodésicas se aproximan o alejan entre si. La variación de esa separación queda determinada por la *ecuación de la desviación geodésica*:

$$\frac{\partial^2\xi^\alpha}{\partial\tau^2} = \mathrm{R}^\alpha_{\rho\mu\nu}\,\dot{\gamma}^\rho_1\,\xi^\mu\,\dot{\gamma}^\nu_2$$

La ecuación de Einstein con constante cosmológica

Einstein aplicó la RG a la Cosmología (1917) y obtuvo una solución que representaba un universo homogéneo, isótropo, no estable que colapsaba. A fin de obtener un modelo de universo estático, modificó la ecuación

$$\mathrm{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R\, \mathrm{g}_{\mu\nu} + \Lambda\, \mathrm{g}_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}\, \mathrm{T}_{\mu\nu}$$

Λ es la *Constante Cosmológica* y $\Lambda\, \mathrm{g}_{\mu\nu}$ se interpreta como una fuerza repulsiva que compensaba la tendencia al colapso.

En 1922, *Alexander Friedmann* halló soluciones de la ecuación original que describían universos homogéneos e isótropos, en expansión o en contracción. En 1929, *Edwin Hubble* confirmó la expansión del Universo, lo cuál condujo a Einstein a eliminar definitivamente dicho término:

"El mayor error de mi vida" (*A. Einstein*).

Sin embargo, ese término debería ser añadido para explicar la aparente expansión acelerada del Universo, que sería debida a la existencia de la *materia* y *energía oscuras*, de las cuales daría cuenta esa constante.

Formulación variacional: lagrangiana de Hilbert

La ecuación de Einstein puede deducirse de un *principio variacional* (*cálculo de variaciones múltiple*).

La función lagrangiana fué introducida por *David Hilbert* en 1915.

Teorema 2.6

La ecuación de Einstein (sin presencia de materia-energía) se obtiene a partir de la **acción de Hilbert**

$$\mathcal{S}_H = \frac{1}{2K}\int \sqrt{-g}\, R\, d^4x \quad (g = \det(g_{\mu\nu}))\ .$$

$\mathcal{L}_H = \frac{1}{2K}\sqrt{-g}\,\mathrm{R}$ *es la* **lagrangiana de Hilbert**.

Teorema 2.7

La ecuación de Einstein completa se obtiene a partir de la acción

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_H + \mathcal{S}_M = \int \left(\frac{1}{2K} \sqrt{-g}\, R + \mathcal{L}_M \right) d^4x \ ,$$

$\mathcal{L}_M$ *está relacionado con el tensor de esfuerzo-energía-momento mediante*

$$\mathrm{T}_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial \mathrm{g}^{\mu\nu}}$$

La ecuación de Einstein con constante cosmológica se obtiene a partir de la acción

$$\mathcal{S}_\Lambda = \int \left(\frac{1}{2K} \sqrt{-g}\, (R - 2\Lambda) + \mathcal{L}_M \right) d^4x \ ,$$

Soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein

Métrica de Schwarzschild

Primera solución exacta de la ec. de Einstein, (*Karl Schwarzschild*, 1916). Distribución estática de masa M con simetría esférica, de radio R.

$$d\,s^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 - r^2\, d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta\, \mathrm{d}\phi^2 \ ,$$

$$r_s = \frac{2GM}{c^2}$$ es el *radio de Schwarzschild*.

Métrica de Reissner-Nordström

(*Hans Jacob Reissner, Gunnar Nordström*, 1916-1918). Solución para distribución estática de masa, con simetría esférica y carga eléctrica Q,

$$d\,s^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{{r_Q}^2}{r^2}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{{r_Q}^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2\, d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta\, \mathrm{d}\phi^2 \ ,$$

$$r_Q^2 = Q^2 G/(4\pi\varepsilon_o c^4).$$

Métrica de Kerr

(*Roy Patrick Kerr*, 1963). Solución para distribución de masa con simetría esférica y momento angular J,

$$d\,s^2 = \left(1 - \frac{r_s r}{\varrho^2}\right) c^2 dt^2 - \frac{\varrho^2}{\Delta}\, dr^2 - \varrho^2\, d\theta^2 - \left(r^2 + \alpha^2 + \frac{r_s r \alpha^2}{\varrho^2}\right) \sin^2\theta\, \mathrm{d}\phi^2$$

$$+ \frac{r_s r \alpha \sin^2\theta}{\varrho^2} c\, dt\, d\phi \;;\;\; \alpha = \frac{J}{Mc}\;,\;\; \varrho^2 = r^2 + \alpha^2 \cos^2\theta\;,\;\; \Delta = r^2 - r_s r + \alpha^2\;.$$

Métrica de Kerr-Newman

(*Ezra Newman*, 1965). Solución para distribución de masa con simetría esférica, momento angular y carga eléctrica,

$$d\,s^2 = -\varrho^2\left(\frac{dr^2}{\Delta} + d\theta^2\right) + \frac{\Delta}{\varrho^2}\left(c\,dt - \alpha\,\sin^2\theta\, d\phi\right)^2$$

$$-\frac{\sin^2\theta}{\varrho^2}((r^2 + \alpha^2)d\phi - \alpha c\, dt)^2 \;;\;\; \Delta = r^2 - r_s r + \alpha^2 + {r_Q}^2\;.$$

Métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker

(*Alexander Friedmann, Georges Lemaître, Howard Percy Robertson, Arthur Geoffrey Walker*, 1920-1930):

Soluciones estacionarias globales que describen universos homogéneos, isótropos, en expansión o contracción, simplemente conexos o múltiplemente conexos (*Modelo Estándar* en Cosmología),

$$d\,s^2 = -dt^2 + (a(t))^2 \left(\frac{1}{1-kr^2}\, dr^2 + r^2\, d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\phi^2 \right) \;,$$

$a(t) > 0$ es el radio del universo y $k = -1, 0, 1$ indica si la curvatura es negativa, nula o positiva (geometría hiperbólica, plana o esférica).

Para un universo en expansión, ésto tiene relación con su evolución:

- Si es hiperbólica el universo es 'abierto' y la expansión es eterna.
- Si es plana, el ritmo de expansión decrece asintóticamente hasta detenerse en un tiempo infinito.
- Si es esférica, el universo es 'cerrado', la expansión se detiene en un tiempo finito y el Universo comienza a contraerse.

Consecuencias y fenomenología

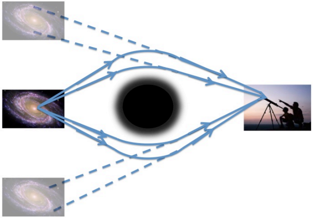
El problema de Kepler: precesión del perihelio

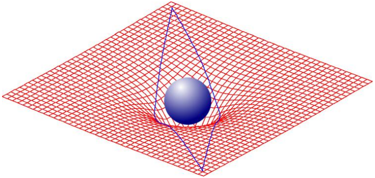
La precesión del perihelio de la órbita de Mercurio había sido medida con exactitud (*Jean Joseph Leverrier*, 1859): $43,11 \pm 0,45$ segundos de arco por siglo (terrestre). Einstein fue el primero en aplicar su teoría a este problema (utilizando una versión no definitiva de las ecuaciones de campo). El resultado dado por la RG es $43,03$ segundos de arco por siglo.

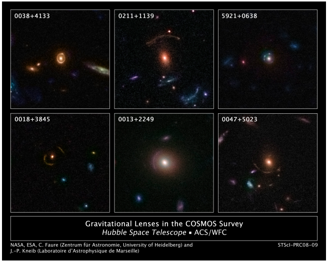
Deflexión de los rayos de luz

Se aprecia al pasar la luz por las inmediaciones de un cuerpo estelar de gran masa (una estrella). El cálculo para un rayo de luz que bordee la corona solar da como resultado un ángulo de deflexión de $1,75$ segundos de arco. Experimentalmente fué medido por primera vez por un equipo liderado por Sir *Arthur Stanley Eddington* (1919), confirmando los cálculos teóricos y constituyó la primera prueba experimental de la RG.

Una consecuencia es el *efecto de lente gravitacional*, que es apreciable en el entorno de fuentes gravitacionales intensas.






0038+4133
0211+1139
5921+0638
0018+3845
0013+2249
0047+5023
Gravitational Lenses in the COSMOS Survey
Hubble Space Telescope ▪ ACS/WFC
NASA, ESA, C. Faure (Zentrum für Astronomie, University of Heidelberg) and
J.-P. Kneib (Laboratoire d'Astrophysique de Marseille)
STScI-PRC08-09

Retardo temporal y "corrimiento hacia el rojo" gravitacional

La primera comprobación experimental, basada en la espectroscopía Mossbauer, fué la última prueba clásica de la RG. La realizaron *R.V. Pound* y *G.A. Rebka* (1959). Los resultados de éste y otros experimentos concordaban con las predicciones con un error inferior al 5 %.

Colapso gravitacional: agujeros negros

A partir del estudio de la *métrica de Schwarzschild*.

Ondas gravitacionales

Son soluciones no estáticas de las ecs. de Einstein, obtenidas haciendo la aproximación de primer orden, Entonces las ecs. adoptan una forma lineal

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 h_{\mu\nu}}{\partial t^2} - \nabla^2 h_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}\,\mathrm{T}_{\mu\nu}\ ,$$

y en el caso $\mathrm{T}^{\mu\nu} = 0$ es la *ecuación de D'Alembert*, cuyas soluciones son ondas que corresponden a perturbaciones de la métrica que se propagan con velocidad c. Para ser perceptibles, se han de producir en fenómenos gravitatorios de gran intensidad (colapso gravitacional, "Big Bang",...).

Índice

La génesis de la RG

Desarrollo histórico de la RG: cronología

- **1907 (Berna)**: Einstein inicia su investigación para conciliar la RE con la teoría de la gravitación newtoniana. En un primer trabajo:
  - Establece el *Principio de Equivalencia*.
    "Una de las mejores ideas que he tenido en mi vida". (A. Einstein).
  - Hace un primer cálculo del *corrimiento hacia el rojo gravitacional* y de la *dilatación del tiempo gravitacional*.
  - Extiende la validez de la ley $E = mc^2$ para la masa gravitatoria.
  - Analizando las ecuaciones de Maxwell, deduce el fenómeno de la *deflexión de la luz* y que el campo e.m. es fuente de la gravitación.

  A. Einstein: "Über das Relativittsprinzip und die aus demselben gezogenen Folgerungen", *Jahrb. Rad. Elektr.* **4** (1907) 411-462.

- **1908-1910 (Zurich)**: Einstein focaliza su interés en otros temas de física teórica, publicando artículos sobre: RE (con *Jakob Laub*), radiación (con *Ludwig Hopf*), opalescencia crítica y física cuántica.

- **1911 (Praga)**: Einstein asume la necesidad de una nueva teoría que tenga como casos particulares la RE y la gravitación newtoniana. En los denominados "trabajos de Praga" sienta las bases de esta teoría:
  - Mejora sus resultados previos (corrimiento hacia el rojo, deflexión de la luz,...).
  - Comienza a trabajar con el *campo gravitatorio* y con los primeros bocetos de ecuación de campo (escalar).
  - Añade la energía a la materia como fuente de la gravitación y, en particular, incorpora la propia energía del campo gravitatorio como fuente (las ecuaciones del campo son no lineales).
  - Pone en evidencia el carácter local del Principio de Equivalencia.

A. Einstein: "Über den Einfluβ der Schwerkraft auf die Ausbreitung des Lichtes", *Ann. der Phys.* **35** (1911) 898-908.

A. Einstein: "Lichtgeschwindigkeit und Statik des Gravitationsfeldes", *Ann. der Phys.* **38** (1912) 355-369.

A. Einstein: "Zur Theorie des statischen Gravitationsfeldes", *Ann. der Phys.* **38** (1912) 443-427.

- **1912 (Zurich)**: Cambio en la concepción de Einstein de la teoría:
  - Asume que la ecuación de campo no puede ser escalar sino tensorial (con campos tensoriales de segundo orden).
  - Se da cuenta del papel esencial que tiene la geometría y concluye que ésta ha de ser no euclidiana ('experiencia del disco rotatorio').
  - Asocia las "fuerzas de marea" con la curvatura del espacio-tiempo.
  - Identifica las componentes de la métrica $g_{\mu\nu}$ como los "campos dinámicos" que describen la gravitación.

  Inicia la colaboración con *Marcel Grossmann* para que le introduzca, oriente y ayude en el uso de las técnicas geométricas adecuadas (que resultan ser los trabajos de *Carl F. Gauss, Bernhard Riemann, Tullio Levi-Civita, Gregorio Ricci-Cubastro, E. Bruno Christoffel*).

Doy aquí las gracias a mi amigo el matemático Grossmann, quien con su ayuda no solamente me economizó el estudio de la literatura matemática relevante, sino que también me apoyó en la búsqueda de las ecuaciones de campo de la gravitación.

(A. Einstein, en *Die Grudlage der Allgemeinen Relativitätstheorie*, p. 6, J.A. Barth, Leipzig, 1916).

- **1913 (Zurich)**: La colaboración con Grossmann:
  - Grossmann hace una detallada y lúcida descripción de las herramientas y técnicas geométricas.
  - Einstein introduce el tensor de EEM, $\mathtt{T}_{\mu\nu}$, para la materia en ausencia de presión y conjetura sus leyes de conservación.
  - Establecen la ecuación de campo en la forma $\mathtt{G}_{\mu\nu} = K\,\mathtt{T}_{\mu\nu}$ (de la que ha de obtenerse la *ecuación de Poisson* como caso particular).
  - Asumen el *Principio de Covariancia General* pero, por una serie de argumentos erróneos, descartan el *tensor de Ricci*, $\mathtt{R}_{\mu\nu}$, como candidato natural en $\mathtt{G}_{\mu\nu}$ y postulan unas ecuaciones invariantes sólo por transformaciones lineales, rompiendo así la *covariancia general*.
  - Como consecuencia se deriva la *deflexión de los rayos de luz* y la *precesión del perihelio*, obteniendo valores (incorrectos por factor $\frac{1}{2}$).

A. Einstein, M. Grossmann: "Entwurf einer verallgemeinerten Relativitätstheorie und einer Theorie der Gravitation", *Zeitsch. Math. Phys.* **62** (1913) 225-261.

A. Einstein, M. Grossmann: "Kovarianzeigenschafte der Feldgleichungen der auf die verallgemeinerte Relativitätstheorie gegründeten Gravitationstheorie", *Zeitsch. Math. Phys.* **63** (1914)

- **1914 (Berlin)**: Einstein, en colaboración con *Adrian D. Fokker*:
  - Postulan una ecuación escalar del campo totalmente covariante: $R = K\,T$; con R la *curvatura escalar* y T la traza del tensor de EEM.
  - Demuestran que una teoría alternativa de la gravitación, de *Gunnar Nordström* (1913, escalar, relativista en $\mathbb{M}^4$ sin curvatura), es un caso particular de la de Einstein-Grossmann.

A. Einstein, A.D. Fokker: "Die Nordströmsche Gravitationstheorie vom Standpunkt des absoluten Differentialkalküls", *Ann. der Phys.* **44** (1914) 321-329.

Einstein en una disertación sobre RG:
  - Introduce la ecuación geodésica del movimiento, demostrando que tiene el límite newtoniano correcto.
  - Demuestra la existencia de una lagrangiana para las ecs. del campo (sin deducirla).

A. Einstein: "Die Nordströmsche Gravitationstheorie vom Standpunkt des absoluten Differentialkalküls", *Preussische Akademie der Wissenschaften* (1914) 1030-1085.

- **Julio 1915 (Götinga)**: Einstein imparte 6 seminarios sobre RG en la *Universidad de Götinga*. Se muestra entusiamado por el interés y la aceptación de *David Hilbert* y otros matemáticos (*Felix Klein*).
- **Octubre 1915 (Rügen)**: Hilbert, que había comenzado a trabajar para obtener un principio variacional del que derivar las ecuaciones de campo de la Gravitación, hace significativos avances en el tema.
- **Noviembre 1915 (Berlin)**: Comunicaciones de Einstein en las sesiones plenarias (semanales) de la *Academia Prusiana de Ciencias*. Hay una frenética correspondencia entre Einstein y Hilbert, en la que ambos se intercambian sus avances.
- **4 noviembre, 1915**: Einstein abandona la formulación de 1913. Postula unas ecuaciones invariantes por transfs. *unimodulares* y demuestra que pueden ser deducidas de un principio variacional. (Usa una descomposición del tensor de Ricci y utiliza parte de él en $\mathtt{G}_{\mu\nu}$).

  A. Einstein: "Zur allgemeinen Relativitätstheorie", *Preussische Akademie der Wissenschaften (PAW)* (1915) 778-786.

  - Einstein envía a Hilbert pruebas de imprenta de este trabajo (7/11).

- **11 noviembre, 1915**: Einstein introduce el tensor de Ricci completo, pero mantiene la unimodularidad y hace una hipótesis técnica adicional (ambas innecesarias).

  A. Einstein: "Zur allgemeinen Relativitätstheorie", *PAW* (1915) 799-801.

  - Einstein comunica a Hilbert los resultados de este trabajo (12/11).
  - Hilbert comunica a Einstein que ha hallado la solución (14/11) y le invita a asistir a una conferencia a la que Einstein no puede ir).
- **18 noviembre, 1915**: Einstein deduce el valor correcto de la precesión del perihelio de Mercurio y el de la deflexión de los rayos de luz (doble del de 1913, concordante con mediciones posteriores).

  A. Einstein: "Erklärung der Perihelbewegung des Merkur aus der allgemeinen Relativitätstheorie", *PAW* (1915) 831-839.

  - Einstein recibe copia del trabajo de Hilbert y le hace un comentario sobre la concordancia con sus propios resultados (18/11).
  - Hilbert felicita efusivamente a Einstein por haber resuelto el problema del perihelio (19/11).

- **20 noviembre, 1915**: Hilbert presenta su trabajo en el que da la lagrangiana de las ecuaciones de campo (con el término de la *curvatura escalar*), aunque no las ecuaciones. También incluye (sin demostrar) un "teorema de conservación" del que extrae algunas conclusiones erróneas (purgadas en posteriores revisiones y aclaradas por *Emmy Noether* en 1918).

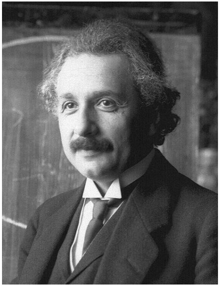
  D. Hilbert: "Die Grundlagen der Physik", *Göttingen Nachr. Math. Phys.* **3** (1915) 395-407.

- **25 noviembre, 1915**: Einstein presenta las ecuaciones de campo en su forma definitiva (con la *curvatura escalar*), sin hipótesis técnicas adicionales y verificando la covariancia general. También incluye el teorema de conservación del EEM (que no deduce de las ecuaciones por desconocer las *identidades de Bianchi*).

  A. Einstein: "Feldgleichungen der Gravitation", *PAW* (1915) 844-847.

  A. Einstein: "Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie", *Ann. der Phys.* (ser. 4) **49** (2016) 769-822,

- **20 diciembre, 1915** (Einstein a Hilbert): *"Ha habido un cierto pique entre nosotros, cuyas causas no deseo analizar. He tenido un sentimiento de amargura respecto a ello, contra el que he luchado con completo éxito. Pienso otra vez en usted con amistad no perturbada y le pido haga lo mismo con respecto a mi. Sería una vergüenza que dos personas de verdad, que hasta cierto punto se sienten liberadas de este bajo mundo, no pudieran llevarse bien".*


Referencias bibliográficas

Referencias básicas

- Albert Einstein: *El significado de la Relatividad*. Espasa-Calpe, Madrid, 1971.
- Charles W. Misner, Kip S. Thorne, John A. Wheeler: *Gravitation*. Freeman and Co., S. Francisco, 1970.
- Abraham Pais: *Subtle is the Lord: The Science and the Life of Albert Einstein*. Oxford University Press, U.S.A., 1982.
- Kip S. Thorne: *Agujeros negros y tiempo curvo. El escandaloso legado de Einstein*. Grijalbo, Barcelona (1995).

Referencias complementarias generales

- James J. Callahan: *The Geometry of Spacetime: An Introduction to Special and General Relativity*. Springer Verlag, Berlin, 2011.
- Sean M. Carroll: *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. Addison-Wesley, S. Francisco, 2004.
- Ray D'Inverno: *Introducing Einstein's Relativity*. Clar. Press, Oxford, 1998.
- Richard P. Feynman: *Lectures on Physics*, Add. Wesley, Read. Ma., 2005.
- Joan Girbau: *Geometria diferencial i relativitat*. Manuals U. Autònoma de Barcelona **10**. Pubs. de la UAB, Bellaterra (1993).
- James B. Hartle: *Gravity: An Introduction to Einstein's General Relativity*. Addison-Wesley, S. Francisco, 2003.
- Poul Olesen: *Gen. Relativity and Cosmology*. N. Bohr Inst. Denmark, 2008.
- Narciso Román Roy: "Relatividad General: Ecuaciones de Einstein de la Relatividad General". Notas de la asignatura *Relativitat General* (2015).

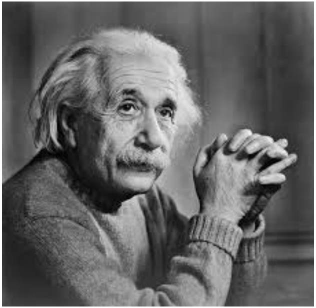
Referencias históricas

- L. Corry, J. Renn, J. Stachel: "Belated decision in the Hilbert-Einstein priority dispute". *Science* **278** (1997) 1270-1273.
- J. Earman, C. Glymour: "Lost in the Tensors: Einstein's Struggles with Covariance Principles, 1912-1916". Carnegie Mellon University, Research Showcase @ CMU (1978).
- A.A. Logunov, M.A.Mestvirishvili, V.A. Petrov: "How were the Hilbert-Einstein equations discovered". *Uspekhi Fizicheskikh Nauk* **174**(6) (2004) 663-678. arXiv:physics/0405075 [physics.hist-ph] (2004).
- I.T. Todorov: "Einstein and Hilbert: the creation of General Relativity". arXiv:physics/0504179 [physics.hist-ph] (2005).
- G Weinstein: "Genesis of General Relativity. Discovery of General Relativity". arXiv:1204.3386 (2012).

Epílogo

"Si yo estuviera equivocado, con uno sería suficiente".

(Respuesta de Einstein al libro filonazi: *100 Authors against Einstein*).



"El Señor es sutil, pero no artero.

La Naturaleza esconde sus secretos porque es sublime, no por astucia".